Г. В. Демиденко, И. А. Мельник

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

Новосибирский государственный университет,

demidenk@math.nsc.ru, sibirochka@ngs.ru

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, МОДЕЛИРУЮЩИХ МНОГОСТАДИЙНЫЙ СИНТЕЗ ВЕЩЕСТВА

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A_n x + F(t,x), \quad t > 0, \\ x|_{t=0} = x^0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{n-1}{\tau} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \dfrac{n-1}{\tau} & -\dfrac{n-1}{\tau} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\dfrac{n-1}{\tau} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{n-1}{\tau} & -\theta \end{pmatrix},$$

$$F(t,x) = \begin{pmatrix} g(t,x_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}, \quad \theta \geqslant 0, \quad \tau > 0.$$

$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$ — неизвестная вектор-функция. Система уравнений (1) возникает при моделировании многостадийного синтеза вещества [1]. Размерность системы n определяется числом стадий синтеза, τ — время протекания процесса, $x_j(t)$ — концентрация вещества на j-й стадии. В случае большого числа стадий n в виду нелинейности функции $g(t,z)$ возникает проблема нахождения концентрации конечного продукта $x_n(t)$. Способ решения этой "проблемы большой размерности" был предложен в работах [1], [2]. Заключается он в следующем.

Будем неограниченно увеличивать размерность системы в (1). При условии, что функция $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица по z, очевидно, что при любом n задача (1) однозначно разрешима на любом отрезке $[0,T]$. Рассматривая только последние компоненты решения каждой из задач (1), получим последовательность функций $\{x_n(t)\}$. Если при любом n начальные условия нулевые, то последовательность $\{x_n(t)\}$ равномерно сходится

$$x_n(t) \to y(t), \quad n \to \infty, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

и предельная функция является решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), & t > \tau, \\ y(t) \equiv 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \end{cases}$$

Также имеют место оценки скорости сходимости (2) вида

$$|x_n(t) - y(t)| \leqslant \frac{c}{n^{1/4}}, \quad n \geqslant n_0, \tag{3}$$

где константа $c > 0$ не зависит от n. Наличие такой оценки дает возможность численного определения конечного продукта $x_n(t)$ при $n \gg 1$.

В случае, когда начальные условия x^0 в (1) ненулевые, при описании предельных свойств последовательности $\{x_n(t)\}$ возникает ряд особенностей. Во-первых, как правило, сходимость (2) имеет место в более слабом смысле. Во-вторых, предельная функция $y(t)$ является *обобщенным* решением начальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = \varphi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \end{cases} \tag{4}$$

при этом не всегда выполнено равенство $y(\tau+0) = \varphi(\tau)$. Приведем некоторые результаты для характерных наборов начальных данных в (1).

Теорема 1. *Пусть начальные условия в* (1) *имеют вид*

$$x^0 = (0, \dots, 0, a)^T.$$

Тогда последовательность $\{x_n(t)\}$ *равномерно сходится на любом отрезке* $[0,T]$, $T > \tau$ *и предельная функция* $y(t)$ *является решением начальной задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = ae^{-\theta t}, \quad t \in [0,\tau], \end{cases}$$

при этом имеет место оценка (3).

Теорема 2. *Пусть* $n = ml$, $1 \leqslant s \leqslant m$, *целое и начальные условия в* (1) *имеют вид*

$$x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^T, \quad x_{sl}^0 = a, \quad x_j^0 = 0 \quad \textit{при} \quad j \neq sl.$$

Тогда последовательность $\{x_n(t)\}$ *является сходящейся в пространстве* $L_p(0,T)$, $T > \tau$,

$$\|x_n(t) - y(t), L_p(0,T)\| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{5}$$

предельная функция $y(t)$ принадлежит пространству $W_p^1(\tau, T)$ и является обобщенным решением начальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = 0, \quad t \in \left[0, \frac{m-s}{m}\tau\right), \\ y(t) = ae^{-\theta\left(t - \frac{m-s}{m}\tau\right)}, \quad t \in \left(\frac{m-s}{m}\tau, \tau\right]. \end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть начальные данные в задаче Коши* (1) *имеют вид*

$$x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^T, \quad x_j^0 = 0 \quad \textit{при} \quad j > i.$$

Тогда для любого $T > \tau$ для последовательности $\{x_n(t)\}$ имеет место сходимость (5), *предельная функция $y(t)$ принадлежит пространству $W_p^1(\tau, T)$ и является обобщенным решением начальной задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = 0, \quad t \in [0, \tau), \\ y(\tau + 0) = x_1^0 + \ldots + x_i^0. \end{cases}$$

Из доказательства теорем 2, 3 также следуют оценки скорости сходимости.

Справедлив обратный результат.

Теорема 4. *Для любой непрерывной на отрезке $[0, \tau]$ функции $\varphi(t)$ решение начальной задачи* (4) *может быть сколь угодно точно аппроксимировано решениями задачи Коши* (1) *при $n \gg 1$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на

2009 – 2013 годы (госконтракты 02.740.11.0429 и 16.740.11.0127) и РФФИ (проект 10-01-00717).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г. *Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления* // Сиб. журн. индустр. мат. – 2004. – Т. 7. – № 1. – С. 73-94.

2. Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е. *Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом* // Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47. – № 1. – С. 58-68.

3. Демиденко Г. В., Мельник И. А. *Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // Сиб. матем. журн. – 2010. – Т. 51. – № 3. – С. 528-546.

Е. В. Десяев

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, desyaev@rambler.ru

ГОМЕОМОРФИЗМ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x), \tag{1}$$

и

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \tag{2}$$